Les espaces vectoriels

M4 – Chapitre 1

I. Définitions

$$E\ e.v. \Leftrightarrow \begin{cases} E \text{ ensemble} \\ + \text{ l.c.i de E t.q. } (E,+) \text{ groupe commutatif} & (\forall\,(u,v) \in E^2, \quad u+v \in E,\ \ 0 \in E) \\ \times \text{ l.c.e. de } (\mathbb{R},E) \text{ dans } E & (\forall\,(\alpha,u) \in \mathbb{R}\times E, \quad \alpha u \in E) \end{cases}$$

F est $s.e.v.$ de $E \Leftrightarrow \begin{cases} F \subset E \\ F \text{ est un e.v.} \end{cases}$

II. Les combinaisons linéaires

1. Définition

$$\text{La c.l. de } v_1 \dots v_k \text{ avec les coefs } \alpha_1 \dots \alpha_k \text{ est : } \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$$

2. Espace engendré

L'espace engendré par les vecteurs $v_1 \dots v_k$ noté $\mathrm{Vect}(v_1, \dots, v_k)$ est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $v_1 \dots v_k$. C'est un $s.e.v.$ de E.

III. Les opérations sur les sous espaces vectoriels

Soient F, G deux $s.e.v.$ de E

- $F \cup G$ pas $s.e.v.$
- $F \cap G$ $s.e.v.$
- $F + G = \{s \in E \mid \exists\,(u,v) \in F \times G, \quad s = u + v\}$
- $F \oplus G = E \Leftrightarrow F$ et G en somme directe $\Leftrightarrow \begin{cases} F + G = E \\ F \cap G = 0 \end{cases}$

IV. Familles

1. Définitions

Soit $\mathcal{F} = (v_1, \dots, v_k)$

$\mathcal{F}$ est génératrice de E $\Leftrightarrow$ Tout vecteur de E est c.l. de $\mathcal{F}$ $\Leftrightarrow$ $\forall\, u \in E, u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$

$\mathcal{F}$ est libre $\Leftrightarrow$ Une c.l. nulle de $\mathcal{F}$ a des coefs nuls $\Leftrightarrow$ $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0$

$\mathcal{F}$ est liée $\Leftrightarrow$ $\mathcal{F}$ non libre

2. Propriétés

Soient $\mathcal{F}$ une famille, $\mathcal{L}$ une famille libre, $\mathcal{G}$ une famille génératrice

- $\mathcal{F}$ libre et génératrice de E $\Leftrightarrow \mathcal{F}$ base de E
- $\mathcal{F} \subset \mathcal{L} \Rightarrow \mathcal{F}$ libre
- $\mathcal{G} \subset \mathcal{F} \Rightarrow \mathcal{F}$ génératrice

V. Dimension d'un espace vectoriel

1. Définition

Si E peut être engendrée par un nombre fini de vecteurs, alors deux bases de E ont le même nombre de vecteurs. Ce nombre est la dimension de E.

2. Propriétés

$$\text{Soient } E \text{ un e.v. tel que } \dim E = n,$$
$$\mathcal{L} = (e_1, \dots, e_l) \text{ famille libre}, \quad \mathcal{G} = (e_1, \dots, e_g) \text{ famille génératrice}$$

- Une famille libre à au plus n éléments
- Une famille génératrice a au moins n éléments
- Une famille libre ou génératrice de n éléments est une base

$$\boxed{\begin{array}{l} l \leq n \\ g \geq n \\ l = g = n \Rightarrow \text{base} \end{array}}$$

3. Théorème de la base incomplète

$$\left.\begin{array}{l} \dim E = n \\ \mathcal{F} = (e_1, \dots, e_l) \text{ libre} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} On \text{ peut compléter } \mathcal{F} \text{ pour avoir une base de } E \\ \text{On complète } \mathcal{F} \text{avec } \mathcal{F}' = (e_{l+1}, \dots, e_n) \end{array}$$

__Propriétés :__

- $\dim \mathcal{F} = l$
- $\dim \mathcal{F}' = n - l$

$$\left.\begin{array}{l} \dim \mathcal{F} = l \\ \dim \mathcal{F}' = n - l \end{array}\right\} \Rightarrow \dim \mathcal{F} + \dim \mathcal{F}' = \dim E$$

- $\mathcal{F} \cap \mathcal{F}' = \{0\}$
- $\mathcal{F} \oplus \mathcal{F}' = E \qquad \mathcal{F} \text{ et } \mathcal{F}' \text{ sont supplémentaires}$

4. Autres propriétés

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} F \subset E \\ \dim F = \dim E \end{array}\right\} \Rightarrow F = E}$$

$$\boxed{\dim(A + B) = \dim A + \dim B - \dim(A \cap B)}$$